

Выводы. Проведенное исследование показало, что применение внешнего быстродействующего высокоточного АЦП в сочетании с микроконтроллером позволяет достичь частоты работы ИСН порядка 40 КГц, которая ограничивается производительностью процессора, а также повысить качество стабилизации выходного напряжения.

Литература

1. URL: <http://avr.ru/ready/contr/power/power>.
2. URL: <http://cxeм.net/pitanie/5-144.php>.
3. URL: http://vintehno.at.ua/news/stabilizator_setevogo_naprjazhenija_na_atmega8535_so_srednekv_adratichnym_voltmetrom_na_tiristorakh/2012-03-16-3.
4. Титовская Н.В., Титовский С.Н. Применение микроконтроллера АТmega в устройстве управления импульсным стабилизатором напряжения // Вестник КрасГАУ. – 2015. – № 7.
5. Лукас В.А. Теория автоматического управления: учеб. для вузов. – М.: Недра, 1990.
6. Иванчура В.И., Краснобаев Ю.В. Модульные быстродействующие стабилизаторы напряжения с ШИМ. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2006.
7. URL: <http://catalog.gaw.ru/index.php?page=document&id=41617>.
8. URL: <http://catalog.gaw.ru/index.php?page=document&id=41616>.
9. URL: <http://datasheets.maxim-ic.com/en/ds/MAX1304-MAX1314.pdf>.



УДК 539.3

А.Д. Матвеев

РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНЫХ КОМПОЗИТНЫХ БАЛОК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДВУХСЕТОЧНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ*

В данной работе изложена процедура построения двухсеточных конечных элементов (ДвКЭ) для расчета трехмерных упругих композитных балок, имеющих постоянное поперечное сечение сложной формы. Предлагаемые ДвКЭ описывают трехмерное напряженное состояние в композитных балках, учитывают их неоднородную структуру и сложную форму, порождают дискретные модели малой размерности. Реализация метода конечных элементов для двухсеточных дискретных моделей трехмерных композитных балок требует меньше объема памяти ЭВМ и временных затрат, чем для базовых моделей.

Ключевые слова: композиты, упругость, балки, метод конечных элементов, двухсеточные конечные элементы.

A.D. Matveev

THE CALCULATION OF THE THREE-DIMENSIONAL IRREGULAR - SHAPED COMPOSITE BEAMS USING THE DOUBLE-GRID FINITE ELEMENTS

The procedure of constructing the two-grid finite elements (TgFE) in order to calculate the three-dimensional elastic composite beams having the constant cross section of the complex shape is presented in the article. The proposed TgFE describe the three-dimensional tense state in the composite beams, take into account their heterogeneous structure and complex form, generate discrete models of low dimension. Implementation of the finite element method for two-grid discrete models of the three-dimensional composite beams requires less computer memory and time costs than for the base models.

Key words: composites, elasticity, beams, finite element method, two-grid finite elements.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14-01-0130)

Введение. Расчет по методу конечных элементов (МКЭ) упругих трехмерных композитных балок со сложным поперечным сечением с учетом их формы и структуры сводится к построению базовых дискретных моделей высокого порядка [1, 2], что вызывает трудности при реализации МКЭ на ЭВМ. В [3, 4] разработаны многосеточные конечные элементы (МнКЭ) формы прямоугольного параллелепипеда, которые проектируются на основе базовых дискретных моделей и порождают многосеточные дискретные модели трехмерных тел меньшей размерности, чем базовые.

В данной работе изложена процедура построения трехмерных двухсеточных конечных элементов (ДвКЭ) сложной формы. Предлагаемые ДвКЭ применяются для расчета трехмерных упругих композитных балок, имеющих постоянное поперечное сечение сложной формы. Пусть трехмерная композитная балка сложной формы расположена в декартовой системе координат $Oxyz$ так, что ось Oy параллельна оси балки, а поперечное сечение балки лежит в плоскости Oxz (рис. 1). Балка представлена шестигранными ДвКЭ V_e^a (рис. 2), $e = 1, \dots, 24$.

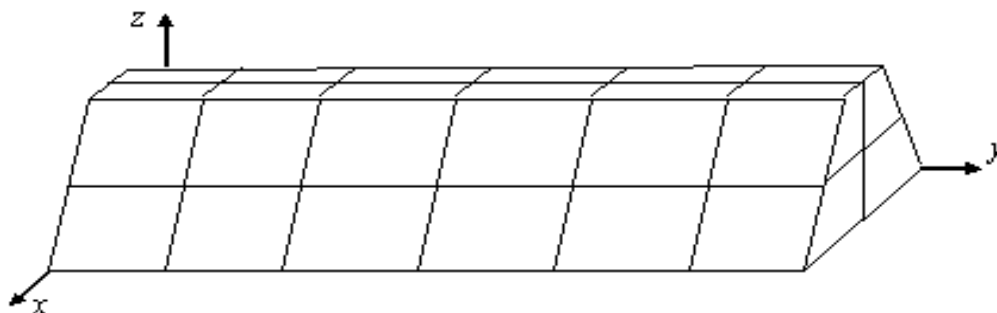


Рис. 1. Балка сложной формы

Основные положения процедуры построения ДвКЭ рассмотрим на примере построения шестигранного ДвКЭ V_e^a , показанного на рисунке 2.

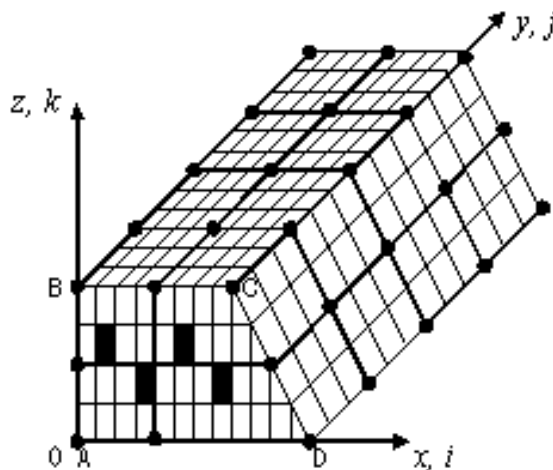


Рис. 2. Шестигранный ДвКЭ V_e^a

Для построения ДвКЭ V_e^a используем две вложенные сетки: мелкую и крупную. Мелкая сетка h_e^a порождена базовым разбиением ДвКЭ V_e^a , которое учитывает его неоднородную структуру и состоит из конечных элементов 1-го порядка формы куба (шестигранника, треугольной прямой призмы [1, 6]). На мелкой сетке определяем крупную сетку H_e^a , для узлов которой вводим целочисленную систему координат ijk . Причем оси i, j, k совпадают соответственно с осями Ox ,

Oy , Oz декартовой системы координат $Oxyz$ ДвКЭ V_e^a . На рисунке 2 показана мелкая сетка базового разбиения ДвКЭ V_e^a , узлы крупной сетки H_e^a отмечены точками, сечения волокон закрашены, общее число узлов крупной сетки H_e^a равно 40, $i = 1, \dots, 5$, $j = 1, \dots, 5$, $k = 1, \dots, 3$. Отметим, что узлы крупной сетки H_e^a в плоскостях, параллельных плоскости Oxz , образуют четырехугольный конечный элемент (КЭ) $ABCD$ второго порядка (рис. 2), который имеет 8 узлов. На рисунке 2 узлы отмечены точками. Интерполяционный полином $P_a(x, z)$ для КЭ $ABCD$ имеет вид

$$P_a(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2 + a_7x^2z + a_8xz^2,$$

где a_i – постоянные, $i = 1, \dots, 8$.

При построении базисных функций $\varphi_\beta(x, y, z)$ ДвКЭ V_e^a используем полиномы Лагранжа $L_\beta(y)$ и базовые функции $N_\beta(x, z)$, которые построены по алгоритмам МКЭ для двумерного интерполяционного полинома $P_a(x, z)$. Общее число базисных функций φ_β равно 40 (т. е. $\beta = 1, \dots, 40$).

Базисную функцию φ_β для узла β (крупной сетки H_e^a ДвКЭ V_e^a) представляем в следующем виде:

$$\varphi_\beta(x, y, z) = N_\beta(x, z)L_\beta(y), \quad (1)$$

где $\beta = 1, \dots, 40$.

Отметим, что вместо полиномов Лагранжа $L_\beta(y)$ можно использовать базисные функции $N_\beta^n(y)$, отвечающие интерполяционному полиному $P_n(y)$ n -го порядка. Для ДвКЭ V_e^a имеем $n = 4$, т.е. полином $P_4(y)$ имеет вид

$$P_4(y) = b_1 + b_2y + b_3y^2 + b_4y^3 + b_5y^4,$$

где b_i – постоянные, $i = 1, \dots, 5$.

Функции перемещений u_a, v_a, w_a ДвКЭ V_e^a (построенные на крупной сетке H_e^a) представим в виде

$$u_a = \sum_{\beta=1}^{40} \varphi_\beta u_\beta, \quad v_a = \sum_{\beta=1}^{40} \varphi_\beta v_\beta, \quad w_a = \sum_{\beta=1}^{40} \varphi_\beta w_\beta, \quad (2)$$

где $\varphi_\beta, u_\beta, v_\beta, w_\beta$ – базисная функция и значения функций перемещений u_a, v_a, w_a β -го узла крупной сетки H_e^a , $\beta = 1, \dots, 40$.

Пусть $\mathbf{q}_e^a = \{u_1, \dots, u_{40}, v_1, \dots, v_{40}, w_1, \dots, w_{40}\}^T$ есть вектор узловых перемещений крупной сетки H_e^a , т.е. \mathbf{q}_e^a – вектор узловых перемещений ДвКЭ V_e^a . На базовом разбиении ДвКЭ V_e^a строим функционал Π_e^a полной потенциальной энергии. Причем $\Pi_e^a = \Pi_e^a(\mathbf{q}_e^h)$, где \mathbf{q}_e^h вектор узловых перемещений базового разбиения ДвКЭ V_e^a . С помощью (2) вектор узловых перемещений \mathbf{q}_e^h (т. е. вектор узловых перемещений мелкой сетки h_e^a) выражаем через вектор \mathbf{q}_e^a узловых перемещений ДвКЭ V_e^a . В результате имеем $\Pi_e^a = \Pi_e^a(\mathbf{q}_e^a)$. Из условия $\partial \Pi_e^a(\mathbf{q}_e^a) / \partial \mathbf{q}_e^a = 0$ получаем формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых сил ДвКЭ V_e^a .

Достоинства ДвКЭ в композитных балках состоят в следующем:

- описывают трехмерное напряженное состояние;
- учитывают неоднородную (микронеоднородную) структуру;
- учитывают сложную форму и сложный характер крепления балок;
- порождают дискретные модели малой размерности.

Реализация МКЭ для двухсеточных дискретных моделей трехмерных композитных балок требует меньше объема памяти ЭВМ и временных затрат, чем для базовых дискретных моделей.

Приведен пример расчета по МКЭ балки волокнистой структуры, имеющей поперечное сечение сложной формы. Анализ расчетов балки показывает высокую эффективность применения предлагаемых ДвКЭ.

1. Процедура построения двухсеточных конечных элементов сложной формы. Основные положения процедуры покажем на примере построения композитного ДвКЭ V_e^b сложной формы, который расположен в декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 3). ДвКЭ V_e^b есть прямоугольный параллелепипед размерами $18h \times 24h \times 18h$, имеющий отверстие сложной формы. Считаем, что между компонентами неоднородной структуры ДвКЭ V_e^b связи идеальны, а функции перемещений, напряжений и деформаций этих компонентов удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, отвечающим трехмерной задаче теории упругости [5], т.е. во всей области ДвКЭ V_e^b реализуется трехмерное напряженное состояние. ДвКЭ V_e^b армирован непрерывными волокнами, параллельными оси Oy . Область ДвКЭ V_e^b представляем базовым разбиением, состоящим из однородных односеточных КЭ V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h [1], $j = 1, \dots, M$; где M – общее число КЭ V_j^h . На рисунке 3 показано базовое разбиение ДвКЭ V_e^b на КЭ V_j^h в плоскости Oxz , сечения волокон (размерами $h \times h$) закрашены. Базовое разбиение ДвКЭ V_e^b учитывает его неоднородную структуру и порождает мелкую узловую сетку V_i^h . На мелкой сетке V_i^h определяем крупную сетку H_e^b . На рисунке 3 узлы сетки H_e^b отмечены точками. Общее число узлов крупной сетки H_e^b равно 60. Крупная сетка V_i^H вложена в сетку H_b формы прямоугольного параллелепипеда размерности $n_1 \times n_2 \times n_3$, которая расположена в целочисленной системе координат i, j, k ; $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$, $k = 1, \dots, n_3$ (рис. 4), $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 4$, узлы сетки H_e^b отмечены точками. Заметим, что не все узлы сетки H_b являются узлами крупной сетки H_e^b .

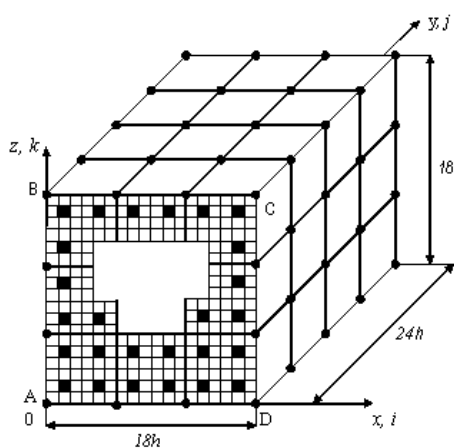


Рис. 3. ДвКЭ V_e^b сложной формы

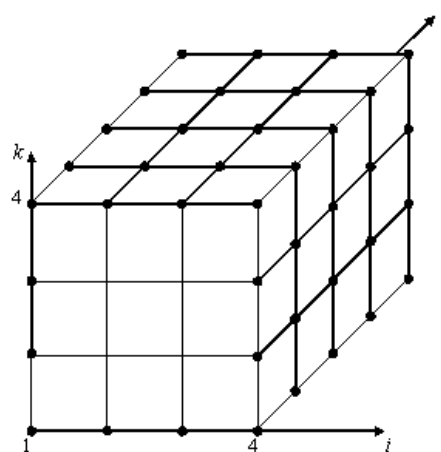


Рис. 4. Сетка H_b

При построении базисных функций перемещений $\psi_{ijk}(x, y, z)$ ДвКЭ V_e^b используем полиномы Лагранжа $L_j(y)$ и двумерный интерполяционный полином $P_b(x, z)$. Общее число базисных функций ψ_{ijk} равно 60. Отметим, что узлы крупной сетки H_e^b в плоскостях, параллельных плоскости Oxz , образуют прямоугольный КЭ $ABCD$ 3-го порядка (см. рис. 3), который имеет 12 узлов (узлы отмечены точками). Интерполяционный полином $P_b(x, z)$ для КЭ $ABCD$ (см. рис. 3) имеет вид

$$P_b(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2 + a_7x^2z + a_8xz^2 + a_9xz^3 + a_{10}zx^3 + a_{11}x^3 + a_{12}z^3, \quad \text{где } a_i - \text{постоянные, } i = 1, \dots, 12.$$

Базисную функцию $\psi_{ijk}(x, y, z)$ для узла i, j, k (крупной сетки H_e^b ДвКЭ V_e^b) с координатами x_i, y_j, z_k представляем в следующем виде:

$$\psi_{ijk}(x, y, z) = N_{ik}(x, z)L_j(y), \quad (3)$$

где $N_{ik}(x, z)$ – базисные функции перемещений четырехугольного КЭ $ABCD$ (см.рис. 3), построенные по МКЭ и отвечающие полиному $P_b(x, z)$, $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, 5$, $k = 1, \dots, 4$; $L_j(y)$ – полиномы Лагранжа, которые имеют вид

$$L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^5 \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha}. \quad (4)$$

Узлу i, j, k крупной сетки H_e^b ДвКЭ V_e^b определим число β и введем обозначение $N_\beta = \psi_{ijk}$, $\beta = 1, \dots, 60$. Тогда функции перемещений u_b, v_b, w_b ДвКЭ V_e^b (построенные на крупной сетке H_e^b) представим в виде

$$u_b = \sum_{\beta=1}^{60} \psi_\beta u_\beta, \quad v_b = \sum_{\beta=1}^{60} \psi_\beta v_\beta, \quad w_b = \sum_{\beta=1}^{40} \varphi_\beta w_\beta, \quad (5)$$

где $\psi_\beta, u_\beta, v_\beta, w_\beta$ – базисная функция и значения функций перемещений u_b, v_b, w_b β -го узла крупной сетки H_e^b , $\beta = 1, \dots, 60$.

Пусть $\mathbf{q}_e^b = \{u_1, \dots, u_{60}, v_1, \dots, v_{60}, w_1, \dots, w_{60}\}^T$ есть вектор узловых перемещений крупной сетки H_e^b , т.е. вектор узловых перемещений ДвКЭ V_e^b . Полную потенциальную энергию Π_e^b базового разбиения ДвКЭ V_e^b представим в форме [1, 6]

$$\Pi_e^b = \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_j^T [K_j^h] \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T \mathbf{P}_j \right), \quad (6)$$

где $[K_j^h]$ – матрица жесткости; $\mathbf{P}_j, \mathbf{q}_j$ – векторы узловых сил и перемещений КЭ V_j^h базового разбиения ДвКЭ; T – транспонирование.

Используя (5), вектор \mathbf{q}_j узловых перемещений КЭ V_j^h выражаем через вектор \mathbf{q}_i^b узловых перемещений ДвКЭ V_e^b . В результате получим равенство

$$\mathbf{q}_j = [A_j^b] \mathbf{q}_i^b, \quad (7)$$

где $[A_j^b]$ – прямоугольная матрица, $j = 1, \dots, M$.

Подставляя (7) в выражение (6), из условия $\partial \Pi_e^b / \partial \mathbf{q}_e^b = 0$ получаем уравнение $[K_e^b] \mathbf{q}_e^b = \mathbf{F}_e^a$, где

$$[K_e^b] = \sum_{j=1}^M [A_j^b]^T [K_j^h] [A_j^b], \quad \mathbf{F}_e^b = \sum_{j=1}^M [A_j^b]^T \mathbf{P}_j, \quad (8)$$

здесь $[K_e^b]$, \mathbf{F}_e^b – матрица жесткости и вектор узловых сил ДвКЭ V_e^b .

Отметим, что процедура построения ДвКЭ неоднородной структуры формы прямой треугольной призмы аналогична процедуре п. 1. На рисунке 5 показаны мелкая и крупная сетки ДвКЭ формы прямой треугольной призмы, узлы крупной сетки отмечены точками, сечение волокна, параллельного оси Oy , закрашено.

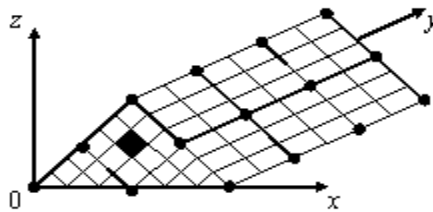


Рис. 5. ДвКЭ формы треугольной призмы

Узлы крупной сетки в плоскости Oxz образуют треугольный КЭ 2-го порядка (6 узлов), для аппроксимации перемещений которого используем интерполяционный полином вида $P(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2$ [6], где $a_i = \text{const}$.

2. Результаты расчетов. В качестве модельной задачи рассмотрим расчет композитной консольной балки V_0 волокнистой структуры (рис. 6). Балка V_0 расположена в декартовой системе координат $Oxyz$, при $y = 0$ имеем $u = v = w = 0$, т.е. балка жестко закреплена. Волокна параллельны оси Oy . Базовое разбиение \mathbf{R}_0 балки V_0 состоит из однородных КЭ V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h .

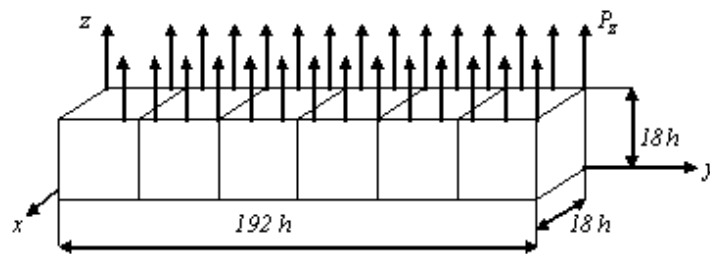


Рис. 6. Балка V_0

Разбиение \mathbf{R}_0 учитывает неоднородную структуру балки и порождает мелкую сетку h_a размерности $19 \times 193 \times 19$. Двухсеточная модель балки V_0 состоит из ДвКЭ V_e^b с размерами $18h \times 24h \times 18h$ (см. рис. 3), построенные по процедуре п. 1, $e = 1, \dots, N$, N – общее число ДвКЭ V_e^b , для балки V_0 $N = 6$. На рисунке 6 показано разбиение балки V_0 на ДвКЭ V_e^b . В узлах мелкой сетки h_a базового разбиения балки V_0 с координатами $x_i, y_j, z = 18h$, где $x_i = 6h(\alpha - 1)$,

$\alpha = 1, \dots, 3$, $y_j = 12h + 6h(\beta - 1)$, $\beta = 1, \dots, 31$, на балку V_0 действуют вертикальные силы $P_z = 0,015$. На рисунке 6 схематично показаны силы P_z . Модуль Юнга связующего материала равен 1, волокна – 10, коэффициент Пуассона для волокна и связующего материала равен 0,3. Длина балки $L = 192h$, поперечное сечение балки с характерными размерами $18h \times 18h$ имеет отверстие сложной формы (см. рис. 3).

Результаты расчетов балки V_0 показывают следующее. Максимальное эквивалентное напряжение $\sigma_h = 3,659$ (перемещение $w_h = 224,697$) двухсеточной дискретной модели \mathbf{R}_h балки V_0 отличается от максимального эквивалентного напряжения $\sigma_0 = 3,940$ (перемещения $w_0 = 228,802$) базовой дискретной модели \mathbf{R}_0 на 7,13 % (на 1,79 %). Размерность базовой модели \mathbf{R}_0 балки V_0 равна 178560, ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна 1985. Двухсеточная дискретная модель \mathbf{R}_h балки V_0 имеет 1152 узловых неизвестных (т.е. имеет в 155 раз меньше неизвестных базовой модели \mathbf{R}_0), ширина ленты СУ МКЭ равна 359 (в 5,5 раза меньше ширины ленты СУ МКЭ модели \mathbf{R}_0). Реализация МКЭ для двухсеточной модели \mathbf{R}_h требует в 855 раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовой модели \mathbf{R}_0 . Эквивалентные напряжения определяются по 4-й теории прочности.

Литература

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
2. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Мир, 1982.
3. Матвеев А.Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов. – Деп. в ВИНТИ № 2990-В00. 2000.
4. Матвеев А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // ПМТФ. – 2004. – № 3.
5. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1982.
6. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981.

УДК 539.371

И.О. Богульский

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНОГО НОРМАЛЬНОГО УДАРА ПО СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ ПРЕГРАДЕ

В работе проведено моделирование взаимодействия большого числа жестких цилиндрических ударников с упругой, слоисто-неоднородной плитой. Решение основано на эффективном численном решении задачи о взаимодействии одного жесткого цилиндра с неоднородной преградой и алгоритме сборки полного решения путем суперпозиции элементарных решений.

Ключевые слова: упругая среда, суперпозиция, численное решение.

I.O. Bogulskii

MODELING OF THE COMPLEX NORMAL IMPACT ON THE LAYERED-INHOMOGENEOUS BARRIER

The interaction modeling of a large number of rigid cylindrical projectiles with the elastic, layered-inhomogeneous plate is conducted in the article. The solution is based on the task efficient numerical solution of one rigid cylinder interaction with the inhomogeneous barrier and on the algorithm of the complete solution integration by superposition of elementary solutions.

Key words: elastic medium, superposition, numerical solution.