УДК 519.8

А.А. Городов, А.А. Кузнецов, О.В. Демьяненко

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПО АВТОРЕГРЕССИИ

В статье предлагается метод подбора параметров, основанный на использовании числовых рядов в AR(p) моделях. Показана связь прогнозов по авторегрессии с треугольником Паскаля и числами Фибоначчи и Трибоначчи. Даны рекомендации по применению золотого сечения при прогнозировании.

***Ключевые слова**: временные ряды, нормированные числовые ряды, AR(p) модели, ряд Фибоначчи, треугольник Паскаля.*

A.A. Gorodov, A.A. Kuznetsov, O.V. Demyanenko

GOLDEN SECTION AND FORECASTING ON AUTOREGRESS

The trial and error method of parameters based on numerical series use in AR(p) models is offered in the article. Connection of the forecasts on autoregress with the Pascal triangle, Fibonacci numbers and Tribonacci numbers is shown. Recommendations on golden section application in the process of forecasting are given.

***Key words**: time series, normalized numerical series, AR(p) models, Fibonacci numbers, Pascal triangle.*

Введение. В элементарной математике существует много задач, часто трудных и интересных, которые не связаны с чьим-либо именем, и часто бывает очень трудно установить, в каком именно сборнике появилась впервые та или иная задача. Такой теорией является и теория чисел Фибоначчи. Выросшие из знаменитой «задачи о кроликах», имеющей почти семисот пятидесятилетнюю давность, числа Фибоначчи до сих пор остаются одной из самых увлекательных глав элементарной математики [1,5].

Если практически все в нашем мире базируется на коэффициентах Фибоначчи, почему бы не использовать их в техническом анализе движения цен на биржах. Впервые это предложил Ральф Нельсон Эллиотт. В дальнейшем будет показано, что данное предположение недалеко от истины.

В практических задачах прогнозирования по временным рядам одним из часто применяемых методов является модель авторегрессии p-го порядка AR(p). В данной модели текущее значение ряда x_t представляется в виде линейной комбинации конечного числа предыдущих значений процесса и случайной величины ε_t:

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \ldots + \varphi_p x_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ – весовые коэффициенты [1].

Как правило, нахождение параметров $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ осуществляется по методу наименьших квадратов (МНК) и методу максимального правдоподобия (ММП) [2,3].

В работе [4] был предложен метод подбора параметров, основанный на использовании нормированных числовых рядов в AR(p) моделях. Сделан сравнительный анализ результатов моделирования временных рядов данного метода с другими известными.

При этом под нормированным понимается сходящийся числовой ряд $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$, если $\sum_{i=0}^{\infty} b_i = 1$.

Текущее значение ряда x_t будет представлено следующим образом:

$$x_t = b_0 x_{t-1} + b_0 x_{t-2} + \ldots + b_{p-1} x_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где $b_0, b_0, \ldots, b_{p-1}$ – первые p членов нормированного числового ряда, выступающие в качестве весовых коэффициентов предыстории временного ряда.

Прогнозное значение y_{t+1} вычисляется следующим образом:

$$y_{t+1}^{(m;p)} = b_0^{(m;p)} x_t + b_1^{(m;p)} x_{t-1} + \ldots + b_{p-1}^{(m;p)} x_{t-p+1},$$

или

$$y_{t+1}^{(m;p)} = \sum_{i=0}^{p-1} b_i^{(m;p)} x_{t-i+1}, \qquad (1)$$

где m – номер нормированного числового ряда из некоторой базы рядов, обладающих вышеуказанными свойствами; p – порядок модели; верхний индекс $(m;p)$ указывает на номер ряда и на порядок модели.

Формула представляет собой модель прогнозирования по полной предыстории (разложение Вольда).

При этом прогнозное значение $y_{t+1}^{(m;p)}$ будет представлять собой сумму предыстории динамического ряда с весовыми коэффициентами, являющимися элементами числового ряда.

В большинстве задач прогнозирования необходимо делать прогноз на k значений вперед из x_t. Как указывалось выше, прогноз на одно значение вперед согласно методу нормированных числовых рядов будет рассчитываться по формуле (1).

Несколько упростим формулу (1), тогда

$$y_{t+1} = \sum_{i=0}^{p-1} b_i x_{t-i+1}. \qquad (1а)$$

Согласно (1а) прогноз на k значений вперед из x_t:

$$y_{t+2} = b_0 y_{t+1} + \sum_{i=1}^{t-1} b_i x_{t-i},$$

$$y_{t+3} = b_0 y_{t+2} + b_1 y_{t+1} + \sum_{i=2}^{t-1} b_i x_{t-i},$$

$$\vdots$$

$$y_{t+k} = b_0 y_{t+k-1} + b_1 y_{t+k-2} + \cdots + \sum_{i=k}^{t-1} b_i x_{t-i} \Rightarrow$$

$$y_{t+k} = \sum_{i=0}^{k-2} b_i y_{t+k-i} + \sum_{i=k-1}^{t-1} b_i x_{t-i}.$$

Далее рассмотрим прогноз в моделях AR(2).

Авторегрессия 2-го порядка

Распишем прогноз при использовании только двух предшествующих членов динамического ряда.

$$y_{t+1} = b_0 x_t + b_1 x_{t-1},$$

$$y_{t+2} = b_0 y_{t+1} + b_1 x_t = b_0 (b_0 x_t + b_1 x_{t-1}) + b_1 x_t = (b_0^2 + b_1) x_t + b_0 b_1 x_{t-1},$$

$$y_{t+3} = b_0 y_{t+2} + b_1 y_{t+1} = b_0 \left[(b_0^2 + b_1) x_t + b_0 b_1 x_{t-1} \right] + b_1 \left[b_0 x_t + b_1 x_{t-1} \right] =$$

$$= (b_0^3 + 2 b_0 b_1) x_t + (b_0^2 b_1 + b_1^2) x_{t-1},$$

$$y_{t+4} = b_0 y_{t+3} + b_1 y_{t+2} = b_0 \left[(b_0^3 + 2 b_0 b_1) x_t + (b_0^2 b_1 + b_1^2) x_{t-1} \right] +$$

$$+ b_1 \left[(b_0^2 + b_1) x_t + b_0 b_1 x_{t-1} \right] = (b_0^4 + 3 b_0^2 b_1 + b_1^2) x_t + (b_0^3 b_1 + 2 b_0 b_1^2) x_{t-1}.$$

$$\vdots$$

Либо можно записать:

$$y_{t+k} = \alpha_1 (k) x_t + \alpha_2 (k) x_{t-1}.$$

Выпишем ряд весовых коэффициентов при x_t для различных k:

$$\alpha_1(1) = b_0$$
$$\alpha_1(2) = b_0^2 + b_1$$
$$\alpha_1(3) = b_0^3 + 2b_0 b_1$$
$$\alpha_1(4) = b_0^4 + 3b_0^2 b_1 + b_1^2$$
$$\alpha_1(5) = b_0^5 + 4b_0^3 b_1 + 3b_0 b_1^2$$
$$\alpha_1(6) = b_0^6 + 5b_0^4 b_1 + 6b_0^2 b_1^2 + b_1^3$$
$$\alpha_1(7) = b_0^7 + 6b_0^5 b_1 + 10b_0^3 b_1^2 + 4b_0 b_1^3$$
$$\alpha_1(8) = b_0^8 + 7b_0^6 b_1 + 15b_0^4 b_1^2 + 10b_0^2 b_1^3 + b_1^4$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1(k) = b_0^k + \frac{(k-1)}{1!} b_0^{k-2} b_1 + \frac{(k-2)(k-3)}{2!} b_0^{k-4} b_1^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(k-r)(k-r-1)\cdots(k-2r+1)}{r!} b_0^{k-2r} b_1^r,$$

где $\alpha_1(k)$ – это весовой коэффициент при x_t; k – порядковый номер прогнозного значения; r – целая часть от деления $\frac{k}{2}$.

Иначе $\alpha_1(k)$ можно записать в следующей форме:

$$\alpha_1(k) = C_k^0 b_0^k + C_{k-1}^1 b_0^{k-2} b_1 + \cdots + C_{k-r}^r b_0^{k-2r} b_1^r.$$

Нетрудно заметить тот факт, что каждый из вертикальных рядов данной последовательности имеет биномиальные коэффициенты возрастающих прогрессий, представляющих собой сечение по основанию треугольника Паскаля (рис.).

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Треугольник Паскаля

С помощью следующей леммы докажем, что выдвинутое утверждение верно для любого k.

Лемма 1. Пусть $\alpha_1(k) = C_k^0 b_0^k + C_{k-1}^1 b_0^{k-2} b_1 + \cdots + C_{k-r}^r b_0^{k-2r} b_1^r$ – весовой коэффициент при x_t при прогнозировании по МНЧР.

Тогда

$$\alpha_1(k+1) = C_{k+1}^0 b_0^{k+1} + C_k^1 b_0^{k-1} b_1 + \cdots + C_{k-r+1}^r b_0^{k-2r+1} b_1^r.$$

Доказательство.

Отметим, что если k четное то, тогда $r=\dfrac{k}{2}$, в случае k нечетного, тогда $r=\dfrac{k-1}{2}$.

1. Рассмотрим первый случай при k четном, тогда искомую формулу весового коэффициента при x_t можно записать в следующем виде:

$$\alpha_1(k)=C_k^0 b_0^k + C_{k-1}^1 b_0^{k-2} b_1 + C_{k-2}^2 b_0^{k-4} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k}{2}+1}^{\frac{k}{2}-1} b_0^2 b_1^{\frac{k}{2}-1} + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} b_1^{\frac{k}{2}}.$$

Заметим, что величина $(k-1)$ нечетная, а в этом случае $r=\dfrac{k-2}{2}$, или $r=\dfrac{k}{2}-1$. Тогда

$$\alpha_1(k-1)=C_{k-1}^0 b_0^{k-1} + C_{k-2}^1 b_0^{k-3} b_1 + C_{k-3}^2 b_0^{k-5} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k}{2}+1}^{\frac{k}{2}-2} b_0^3 b_1^{\frac{k}{2}-2} + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}-1} b_0 b_1^{\frac{k}{2}-1}.$$

При этом количество членов в $\alpha_1(k)$ на одно больше, чем у $\alpha_1(k-1)$.

Докажем по индукции, что

$$\alpha_1(k+1)=C_{k+1}^0 b_0^{k+1} + C_k^1 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-1}^2 b_0^{k-3} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k}{2}+2}^{\frac{k}{2}-1} b_0^3 b_1^{\frac{k}{2}-1} + C_{\frac{k}{2}+1}^{\frac{k}{2}} b_0 b_1^{\frac{k}{2}}, \qquad (2)$$

при условии, что k четное.

Пусть формула (2) верна. Тогда

$$\alpha_1(k+1)=b_0\alpha_1(k)+b_1\alpha_1(k-1)=$$

$$=b_0\left[C_k^0 b_0^k + C_{k-1}^1 b_0^{k-2} b_1 + C_{k-2}^2 b_0^{k-4} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k}{2}+1}^{\frac{k}{2}-1} b_0^2 b_1^{\frac{k}{2}-1} + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} b_1^{\frac{k}{2}}\right]+$$

$$+b_1\left[C_{k-1}^0 b_0^{k-1} + C_{k-2}^1 b_0^{k-3} b_1 + C_{k-3}^2 b_0^{k-5} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k}{2}+1}^{\frac{k}{2}-2} b_0^3 b_1^{\frac{k}{2}-2} + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}-1} b_0 b_1^{\frac{k}{2}-1}\right]=$$

$$=\left[C_k^0 b_0^{k+1} + C_{k-1}^1 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-2}^2 b_0^{k-3} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k}{2}+1}^{\frac{k}{2}-1} b_0^3 b_1^{\frac{k}{2}-1} + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} b_0 b_1^{\frac{k}{2}}\right]+$$

$$+\left[C_{k-1}^0 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-2}^1 b_0^{k-3} b_1^2 + C_{k-3}^2 b_0^{k-5} b_1^3 + \cdots + C_{\frac{k}{2}+1}^{\frac{k}{2}-2} b_0^3 b_1^{\frac{k}{2}-1} + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}-1} b_0 b_1^{\frac{k}{2}}\right]=$$

$$=C_k^0 b_0^{k+1} + \left(C_{k-1}^1 + C_{k-1}^0\right) b_0^{k-1} b_1 + \left(C_{k-2}^2 + C_{k-2}^1\right) b_0^{k-3} b_1^2 + \cdots$$

$$\cdots + \left[C_{\frac{k}{2}+1}^{\frac{k}{2}-1} + C_{\frac{k}{2}+1}^{\frac{k}{2}-2}\right] b_0^3 b_1^{\frac{k}{2}-1} + \left[C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}-1}\right] b_0 b_1^{\frac{k}{2}}.$$

Используя свойства биномиальных коэффициентов

$$C_n^s + C_n^{s-1} = C_{n+1}^s,\ C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1,$$

получим

$$\alpha_1(k+1)=b_0\alpha_1(k)+b_1\alpha_1(k-1)=$$

$$=C_{k+1}^0 b_0^{k+1} + C_k^1 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-1}^2 b_0^{k-3} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k}{2}+2}^{\frac{k}{2}-1} b_0^3 b_1^{\frac{k}{2}-1} + C_{\frac{k}{2}+1}^{\frac{k}{2}} b_0 b_1^{\frac{k}{2}}.,$$

что и требовалось.

2. Рассмотрим второй случай при k нечетном.

Тогда

$$\alpha_1(k)=C_k^0 b_0^k + C_{k-1}^1 b_0^{k-2} b_1 + C_{k-2}^2 b_0^{k-4} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+3}{2}}^{\frac{k-3}{2}} b_0^3 b_1^{\frac{k-3}{2}} + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} b_0 b_1^{\frac{k-1}{2}}.$$

В этом случае величина $(k-1)$ четная, тогда $r=\dfrac{k-1}{2}$.

В свою очередь

$$\alpha_1(k-1)=C_{k-1}^0 b_0^{k-1} + C_{k-2}^1 b_0^{k-3} b_1 + C_{k-3}^2 b_0^{k-4} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-3}{2}} b_0^2 b_1^{\frac{k-3}{2}} + C_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} b_1^{\frac{k-1}{2}}.$$

При этом количество членов в $\alpha_1(k)$ тоже, что и у $\alpha_1(k-1)$.

Докажем по индукции, что

$$\alpha_1(k+1)=C_{k+1}^0 b_0^{k+1} + C_{k-2}^1 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-1}^2 b_0^{k-3} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+3}{2}}^{\frac{k-1}{2}} b_0^2 b_1^{\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k+1}{2}} b_1^{\frac{k+1}{2}}, \qquad (3)$$

при условии, что k нечетное.

Пусть формула (3) верна. Тогда

$$\alpha_1(k+1)=b_0\alpha_1(k)+b_1\alpha_1(k-1)=$$

$$=b_0\left[C_k^0 b_0^k + C_{k-1}^1 b_0^{k-2} b_1 + C_{k-2}^2 b_0^{k-4} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+3}{2}}^{\frac{k-3}{2}} b_0^3 b_1^{\frac{k-3}{2}} + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} b_0 b_1^{\frac{k-1}{2}}\right]+$$

$$+b_1\left[C_{k-1}^0 b_0^{k-1} + C_{k-2}^1 b_0^{k-3} b_1 + C_{k-3}^2 b_0^{k-4} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-3}{2}} b_0^2 b_1^{\frac{k-3}{2}} + C_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} b_1^{\frac{k-1}{2}}\right]=$$

$$=\left[C_k^0 b_0^{k+1} + C_{k-1}^1 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-2}^2 b_0^{k-3} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+3}{2}}^{\frac{k-3}{2}} b_0^4 b_1^{\frac{k-3}{2}} + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} b_0^2 b_1^{\frac{k-1}{2}}\right]+$$

$$+\left[C_{k-1}^0 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-2}^1 b_0^{k-3} b_1^2 + C_{k-3}^2 b_0^{k-5} b_1^3 + \cdots + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-3}{2}} b_0^2 b_1^{\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} b_1^{\frac{k+1}{2}}\right]=$$

$$=C_k^0 b_0^{k+1} + \left(C_{k-1}^1 + C_{k-1}^0\right) b_0^{k-1} b_1 + \left(C_{k-2}^2 + C_{k-2}^1\right) b_0^{k-3} b_1^2 + \cdots$$

$$\cdots+\left[C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-3}{2}}\right] b_0^2 b_1^{\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} b_1^{\frac{k+1}{2}}.$$

Воспользуемся уже указанными свойствами биномиальных коэффициентов и $C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$.

Получим

$$\alpha_1(k+1)=C_{k+1}^0 b_0^{k+1} + C_{k-2}^1 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-1}^2 b_0^{k-3} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+3}{2}}^{\frac{k-1}{2}} b_0^2 b_1^{\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k+1}{2}} b_1^{\frac{k+1}{2}}.$$

Из пунктов 1 и 2 следует, что формула верна для любого k. Лемма доказана.

Предложение 1. Пусть $\sum_{i=0}^{\infty} b_0^i$ – нормированный знакоположительный степенной ряд, где $0<b_i<1$, т.е. $\sum_{i=0}^{\infty} b_i = b_0 + b_0^2 + b_0^3 \cdots$.

Преобразуем ряд весовых коэффициентов при x_t, тогда:

$$
\begin{gathered}
\alpha_1(1)=b_0\\
\alpha_1(2)=2b_0^2\\
\alpha_1(3)=3b_0^3\\
\alpha_1(4)=5b_0^4\\
\alpha_1(5)=8b_0^5\\
\alpha_1(6)=13b_0^6\\
\vdots\\
\alpha_1(k)=F_2(k+1)b_0^k,
\end{gathered}
$$

где $F_2(k+1)$ – ряд чисел Фибоначчи.

Определение 1. Последовательность чисел, начинающаяся с двух единиц $F_2(1)=F_2(2)=1$, а каждое из следующих получается сложением двух предыдущих, называется *рядом Фибоначчи*, а члены ее – *числами Фибоначчи*.

Покажем, что выдвинутое утверждение верно.

Лемма 2. Пусть $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_0^i$ – нормированный знакоположительный степенной ряд, где $0 \le b_i < 1$. Тогда $\alpha_1(k)=F_2(k+1)b_0^k$, где $F_2(k+1)$ – ряд чисел Фибоначчи.

Доказательство. Ряд чисел Фибоначчи имеет общую рекурсивную формулу представления:

$$F_2(k+1)=F_2(k)+F_2(k-1).$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(k) &= b_0\alpha_1(k-1)+b_0^2\alpha_1(k-2)=b_0\left(F_2(k)b_0^k\right)+b_0^2\left(F_2(k-1)b_0^{k-1}\right)=\\
&=b_0^k\left(F_2(k)+F_2(k-1)\right)=F_2(k+1)b_0^k.
\end{aligned}
$$

Лемма доказана.

Докажем, что при увеличении k весовой коэффициент $\alpha_1(k)$ обнуляется, в случае непревосходства b_0 величины, обратной золотому сечению.

Лемма 3. Пусть $b_0 < \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k)=0$.

Доказательство. Воспользуемся формулой Бине [5]:

$$F_2(k)=\frac{\gamma_1^k-\gamma_2^k}{\sqrt{5}},$$

где $\gamma_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\gamma_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Также произведем замену $b_0=\dfrac{1}{q}$, где $q>1$. Тогда

$$\alpha_1(k)=F_2(k+1)\frac{1}{q^k}.$$

Определим предел k-го члена:

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_1(k)=\lim_{k\to\infty}\frac{\gamma_1^{(k+1)}-\gamma_2^{(k+1)}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{q^k}=\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{k\to\infty}\frac{\gamma_1^{(k+1)}-\gamma_2^{(k+1)}}{q^k}=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_1^{(k+1)}\left(1-\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{(k+1)}\right)}{q^k} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_1^{(k+1)}}{q^k} = \frac{\gamma_1}{\sqrt{5}} \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\gamma_1}{q}\right)^k = \frac{\gamma_1}{\sqrt{5}} * 0 = 0,$$

при $q > \gamma_1$.

Проверим ряд на сходимость по признаку Коши:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\alpha_1(k)} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{\gamma_1^{(k+1)} - \gamma_2^{(k+1)}}{\sqrt{5} q^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\gamma_1^{(k+1)} - \gamma_2^{(k+1)}\right)^{\frac{1}{k}}}{5^{\frac{1}{k+2}} q} = \frac{1}{q} \frac{\lim_{k\to\infty}\left(\gamma_1^{(k+1)} - \gamma_2^{(k+1)}\right)^{\frac{1}{k}}}{\lim_{k\to\infty} 5^{\frac{1}{k+2}}} =$$

$$= \frac{1}{q} \lim_{k\to\infty} \gamma_1^{\frac{(k+1)}{k}} \left(1 - \frac{\gamma_2^{(k+1)}}{\gamma_1^{(k+1)}}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{q} \lim_{k\to\infty} \gamma_1 \gamma_1^{\frac{1}{k}} = \frac{\gamma_1}{q} \lim_{k\to\infty} \gamma_1^{\frac{1}{k}} = \frac{\gamma_1}{q} < 1$$

при $q > \gamma_1$.

Вернемся к замене, тогда при $b_0 < \frac{1}{\gamma_1}$ $\lim_{k\to\infty} \alpha_1(k) = 0$. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим ряд весовых коэффициентов при x_{t-1} для различных k:

$$\alpha_2(1) = b_1$$

$$\alpha_2(2) = b_0 b_1$$

$$\alpha_2(3) = b_0^2 b_1 + b_1^2$$

$$\alpha_2(4) = b_0^3 b_1 + 2 b_0 b_1^2$$

$$\alpha_2(5) = b_0^4 b_1 + 3 b_0^2 b_1^2 + b_1^3$$

$$\alpha_2(6) = b_0^5 b_1 + 4 b_0^3 b_1^2 + 3 b_0 b_1^3$$

$$\alpha_2(7) = b_0^6 b_1 + 5 b_0^4 b_1^2 + 6 b_0^2 b_1^3 + b_1^4$$

$$\vdots$$

$$\alpha_2(k) = b_0^{k-1} b_1 + \frac{(k-2)}{1!} b_0^{k-3} b_1^2 + \frac{(k-3)(k-4)}{2!} b_0^{k-5} b_1^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(k-r-1)(k-r-2)\cdots(k-2r)}{r!} b_0^{k-2r} b_1^{r+1},$$

где $\alpha_2(k)$ – это весовой коэффициент при x_{t-1}; k – порядковый номер прогнозного значения; r – целая часть от деления $\frac{k-1}{2}$.

Запишем $\alpha_2(k)$ в следующей форме:

$$\alpha_2(k) = C_{k-1}^0 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-2}^1 b_0^{k-3} b_1^2 + \cdots + C_{k-r}^r b_0^{k-2r} b_1^{r+1}.$$

Поэтому была сформулирована следующая лемма, доказательство ее аналогично лемме 1.

Лемма 4. Пусть $\alpha_2(k) = C_{k-1}^0 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-2}^1 b_0^{k-3} b_1^2 + \cdots + C_{k-r}^r b_0^{k-2r} b_1^{r+1}$ – весовой коэффициент при x_t при прогнозировании по МНЧР.

Тогда

$$\alpha_2(k+1)=C_k^0 b_0^k b_1 + C_{k-1}^1 b_0^{k-2} b_1^2 + \cdots + C_{k-r-1}^{r+1} b_0^{k-2r-2} b_1^{r+2}.$$

Доказательство.

Как и в лемме 2 приведем доказательство для k-четного и нечетного.

1. Пусть k-четное, тогда $\frac{k-1}{2}$. В свою очередь:

$$\alpha_2(k)=C_{k-1}^0 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-2}^1 b_0^{k-3} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k-2}{2}}^{\frac{k-2}{2}} b_0 b_1^{\frac{k}{2}}.$$

Величины $(k-1)$ и $(k+1)$ нечетные:

$$\alpha_2(k-1)=C_{k-2}^0 b_0^{k-2} b_1 + C_{k-3}^1 b_0^{k-4} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} b_1^{\frac{k}{2}}.$$

Докажем по индукции, что:

$$\alpha_2(k+1)=C_k^0 b_0^k b_1 + C_{k-1}^1 b_0^{k-2} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+2}{2}}^{\frac{k+2}{2}} b_1^{\frac{k+2}{2}}, \tag{4}$$

при условии, что k четное.

Пусть формула (4) верна. Тогда

$$\alpha_2(k+1)=b_0\alpha_2(k)+b_1\alpha_2(k-1)=$$

$$=b_0\left[C_{k-1}^0 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-2}^1 b_0^{k-3} b_0 b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k-2}{2}}^{\frac{k-2}{2}} b_0 b_1^{\frac{k}{2}}\right]+$$

$$+b_1\left[C_{k-2}^0 b_0^{k-2} b_1 + C_{k-3}^1 b_0^{k-4} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} b_1^{\frac{k}{2}}\right]=$$

$$=\left[C_{k-1}^0 b_0^{k} b_1 + C_{k-2}^1 b_0^{k-2} b_0 b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k-2}{2}}^{\frac{k-2}{2}} b_0^2 b_1^{\frac{k}{2}}\right]+$$

$$+\left[C_{k-2}^0 b_0^{k-2} b_1^2 + C_{k-3}^1 b_0^{k-4} b_1^3 + \cdots + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} b_1^{\frac{k+2}{2}}\right]=$$

$$=C_{k-1}^0 b_0^k b_1 + \left(C_{k-2}^1 + C_{k-2}^0\right) b_0^{k-2} b_1^2 + \cdots + \left[C_{\frac{k+2}{2}}^{\frac{k-2}{2}} + C_{\frac{k+2}{2}}^{\frac{k}{2}}\right] b_1^2 b_1^{\frac{k}{2}} + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} b_1^{\frac{k+2}{2}}.$$

Воспользуемся уже указанными свойствами биноминальных коэффициентов. Получим

$$\alpha_2(k+1)=C_k^0 b_0^k b_1 + C_{k-1}^1 b_0^{k-2} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+2}{2}}^{\frac{k+2}{2}} b_1^{\frac{k+2}{2}},$$

что и требовалось.

2. Пусть k нечетное, тогда $r=\frac{k-1}{2}$. В свою очередь:

$$\alpha_2(k)=C_{k-1}^0 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-2}^1 b_0^{k-3} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} b_1^{\frac{k-1}{2}}.$$

Величины $(k-1)$ и $(k+1)$ нечетные:

$$\alpha_2(k-1)=C_{k-2}^0 b_0^{k-2} b_1 + C_{k-3}^1 b_0^{k-4} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-3}{2}} b_0 b_1^{\frac{k-3}{2}}.$$

Докажем по индукции, что

$$\alpha_2(k+1) = C_k^0 b_0^k b_1 + C_{k-1}^1 b_0^{k-2} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k+1}{2}} b_0 b_1^{\frac{k-1}{2}} \qquad (5)$$

при условии, что k четное.

Пусть формула (5) верна. Тогда

$$\alpha_2(k+1) = b_0\alpha_2(k) + b_1\alpha_2(k-1) =$$
$$= b_0\left[C_{k-1}^0 b_0^{k-1} b_1 + C_{k-2}^1 b_0^{k-3} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} b_1^{\frac{k-1}{2}}\right] +$$
$$+ b_1\left[C_{k-2}^0 b_0^{k-2} b_1 + C_{k-3}^1 b_0^{k-4} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-3}{2}} b_0 b_1^{\frac{k-3}{2}}\right] =$$
$$= \left[C_{k-1}^0 b_0^k b_1 + C_{k-2}^1 b_0^{k-2} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} b_0 b_1^{\frac{k-1}{2}}\right] +$$
$$+ \left[C_{k-2}^0 b_0^{k-2} b_1^2 + C_{k-3}^1 b_0^{k-4} b_1^3 + \cdots + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-3}{2}} b_0 b_1^{\frac{k-1}{2}}\right] =$$
$$= C_{k-1}^0 b_0^k b_1 + \left(C_{k-2}^1 + C_{k-2}^0\right) b_0^{k-1} b_1^2 + \cdots + \left[C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k-3}{2}}\right] b_0 b_1^{\frac{k-1}{2}}.$$

Воспользуемся уже указанными свойствами биноминальных коэффициентов. Получим

$$\alpha_2(k+1) = C_k^0 b_0^k b_1 + C_{k-1}^1 b_0^{k-2} b_1^2 + \cdots + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k+1}{2}} b_0 b_1^{\frac{k-1}{2}}.$$

Лемма доказана для любого k.

Используя предложение 1, преобразуем $\alpha_2(k)$, получим:

$$\alpha_2(1) = b_0^2$$
$$\alpha_2(2) = b_0^3$$
$$\alpha_2(3) = 2b_0^4$$
$$\alpha_2(4) = 3b_0^5$$
$$\alpha_2(5) = 5b_0^6$$
$$\vdots$$
$$\alpha_2(k) = F_2(k)\, b_0^{k+1},$$

где $F_2(k)$ – ряд чисел Фибоначчи.

Лемма 5. Пусть $\sum_{i=0}^{\infty} b_0^i$ – нормированный знакоположительный степенной ряд, где $0 \le b_i < 1$. Тогда $\alpha_2(k) = F_2(k)\, b_0^{k+1}$, где $F_2(k)$ – ряд чисел Фибоначчи.

Доказательство. Пусть лемма 5 верна. Тогда

$$\alpha_2(k) = b_0\alpha_2(k-1) + b_0^2\alpha_2(k-2) = b_0\left(F_2(k-1)\, b_0^k\right) + b_0^2\left(F_2(k-2)\, b_0^{k-1}\right) =$$
$$= b_0^{k+1}\left(F_2(k-1) + F_2(k-2)\right) = F_2(k)\, b_0^{k+1}.$$

Лемма доказана.

Нетрудно доказать, что $\alpha_2(k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Как и в случае с $\alpha_1(k)$, при достаточно большом k коэффициент $\alpha_2(k)$ будет зависеть от золотого сечения.

Лемма 6. Пусть $b_0 < \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_2(k)=0$.

Доказательство.

Произведем аналогичную замену $b_0 = \dfrac{1}{q}$, где $q>1$.

Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_2(k)=\lim_{k\to\infty}\frac{\gamma_1^k-\gamma_2^k}{\sqrt{5}}*\frac{1}{q^{(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{5}q}\lim_{k\to\infty}\frac{\gamma_1^k\left(1-\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^k\right)}{q^k}=\frac{1}{\sqrt{5}q}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\gamma_1}{q}\right)^k=0$$

при $q>\gamma_1$.

Проверим ряд на сходимость по признаку Коши:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\alpha_2(k)}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{\gamma_1^k-\gamma_2^k}{\sqrt{5}q^{(k+1)}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(\gamma_1^k-\gamma_2^k)^{\frac{1}{k}}}{5^{\frac{1}{k+2}}qq^{\frac{1}{k}}}=$$

$$=\frac{1}{q}\frac{\lim\limits_{k\to\infty}(\gamma_1^k-\gamma_2^k)^{\frac{1}{k}}}{\lim\limits_{k\to\infty}5^{\frac{1}{k+2}}q^{\frac{1}{k}}}=\frac{1}{q}\lim_{k\to\infty}\gamma_1\left(1-\frac{\gamma_2^k}{\gamma_1^k}\right)^{\frac{1}{k}}=\frac{\gamma_1}{q}<1$$

при $q>\gamma_1$.

Вернемся к замене, тогда при $b_0 < \dfrac{1}{\gamma_1}$ $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_2(k)=0$. Теорема доказана.

Если из данного ряда коэффициентов $\alpha_2(k)$ вынести b_1 за скобки, мы получим:

$$\alpha_2(k)=b_1\alpha_1(k-1).$$

С помощью следующей леммы докажем данное утверждение.

Лемма 7. Пусть $\alpha_1(k)$ – это весовой коэффициент при x_t, $\alpha_2(k)$ – это весовой коэффициент при x_{t-1} при прогнозировании в AR(2) по МНЧР. Тогда $\alpha_2(k)=b_1\alpha_1(k-1)$.

Доказательство. Согласно лемме 2:

$$\alpha_1(k-1)=F_2(k)b_0^{k-1}.$$

Согласно лемме 5:

$$\alpha_2(k)=F_2(k)b_0^{k+1}=F_2(k)b_0^{k-1}b_0^2=F_2(k)b_0^{k-1}b_1=b_1\alpha_1(k-1).$$

Лемма доказана.

Поэтому $\alpha_2(k)$ имеет те же свойства, что $\alpha_1(k)$.

Обобщим вышесказанное.

Теорема 1. Пусть $y_{t+k}=\alpha_1(k)x_t+\alpha_2(k)x_{t-1}$ – прогнозная модель AR(2) по МНЧР. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\alpha_1(k)=F_2(k+1)b_0^k$;

2) $\alpha_2(k)=F_2(k)b_0^{k+1}$;

3) $\alpha_2(k)=b_1\alpha_1(k-1)$;

4) $\lim\limits_{k\to\infty}y_{t+k}=0$ при $b_0<\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$;

5) $\lim\limits_{k\to\infty} y_{t+k} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}x_t + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{1+\sqrt{5}}x_{t-1}$ при $b_0 = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$;

6) $\lim\limits_{k\to\infty} y_{t+k} = \infty$ при $b_0 > \frac{2}{1+\sqrt{5}}$.

Доказательство. Первое утверждение доказывается леммой 2. Второе леммой 5. Третье утверждение на основе леммы 7.

Доказательство четвертого утверждения доказывается на основе лемм 3 и 6:

$$\lim_{k\to\infty} y_{t+k} = \lim_{k\to\infty}\left(\alpha_1(k)x_t + \alpha_2(k)x_{t-1}\right) = \lim_{k\to\infty}\alpha_1(k)x_t + \lim_{k\to\infty}\alpha_2(k)x_{t-1} =$$
$$= x_t \lim_{k\to\infty}\alpha_1(k) + x_{t-1}\lim_{k\to\infty}\alpha_2(k) = 0 * x_t + 0 * x_{t-1} = 0.$$

На основе 3 и 6 леммы доказывается 5 и 6 пункт теоремы:

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_1(k) = \frac{\gamma_1}{\sqrt{5}},\ \lim_{k\to\infty}\alpha_2(k) = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\gamma_1}, \text{ при } b_0 = \gamma_1.$$

$$\lim_{k\to\infty} y_{t+k} = x_t \lim_{k\to\infty}\alpha_1(k) + x_{t-1}\lim_{k\to\infty}\alpha_2(k) = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}x_t + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{1+\sqrt{5}}x_{t-1}.$$

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_1(k) = \infty,\ \lim_{k\to\infty}\alpha_2(k) = \infty, \text{ при } b_0 > \gamma_1.$$

$$\lim_{k\to\infty} y_{t+k} = x_t \lim_{k\to\infty}\alpha_1(k) + x_{t-1}\lim_{k\to\infty}\alpha_2(k) = \infty\cdot x_t + \infty\cdot x_{t-1} = \infty.$$

Теорема доказана.

Данная теорема позволяет сделать вывод о том, что любой прогноз в модели AR(2) – это распределение предыстории в будущем через золотое сечение.

Далее рассмотрим авторегрессию более высоких порядков.

Авторегрессия 3-го порядка

Распишем прогноз при использовании трех предшествующих членов динамического ряда:

$$y_{t+k} = \alpha_1(k)x_t + \alpha_2(k)x_{t-1} + \alpha_3(k)x_{t-2}.$$

Используя предложение 1, представим коэффициенты $\alpha_1(k)$ при x_t:

$$\alpha_1(1) = b_0$$
$$\alpha_1(2) = 2b_0^2$$
$$\alpha_1(3) = 4b_0^3$$
$$\alpha_1(4) = 7b_0^4$$
$$\alpha_1(5) = 13b_0^5$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1(k) = F_3(k+1)b_0^k,$$

где $F_3(k+1)$ – ряд чисел Трибоначчи.

Напомним.

Определение 2. Ряд Трибоначчи – это последовательность чисел, заданная рекурсией $F_3(k+1) = F_3(k) + F_3(k-1) + F_3(k-2)$, где $F_3(0) = 0$, $F_3(1) = 1$, $F_3(2) = 1$, $F_3(3) = 2$.

Был сформулирован и доказан ряд утверждений.

Лемма 8. Пусть $\sum_{i=0}^{\infty} b_0^i$ – нормированный знакоположительный степенной ряд, где $0 \le b_i < 1$. Тогда $\alpha_1(k) = F_3(k+1)b_0^k$, где $F_3(k)$ – ряд чисел Трибоначчи.

Доказательство. Воспользуемся математической индукцией. Тогда

$$\alpha_1(k) = b_0\alpha_1(k-1) + b_0^2\alpha_1(k-2) + b_0^3\alpha_1(k-3) =$$
$$= b_0\left(F_3(k)b_0^{k-1}\right) + b_0^2\left(F_3(k-1)b_0^{k-2}\right) + b_0^3\left(F_3(k-2)b_0^{k-3}\right) =$$
$$= b_0^k\left(F_3(k) + F_3(k-1) + F_3(k-2)\right) = F_2(k+1)b_0^k.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть $b_0 < \dfrac{1}{\left[\left(9+3\sqrt{33}\right)^{1/3} + \left(9-3\sqrt{33}\right)^{1/3} + 1\right]}$. Тогда, $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k) = 0$.

Доказательство. Ряд Трибоначчи, помимо рекурсии, можно выразить через функцию:

$$F_3(k) = \frac{3\beta\left(\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)\right)^k}{\beta^2 - 2\beta + 4},$$

где $\beta = \sqrt[3]{586+102\sqrt{33}}$, $\lambda_1 = \sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}$, $\lambda_2 = \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}$.

Произведем аналогичную замену $b_0 = \dfrac{1}{q}$, где $q > 1$.

Определим предел k-го члена:

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_1(k) = \lim_{k\to\infty}F_3(k+1)b_0^k = \lim_{k\to\infty}\frac{3\beta\left(\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)\right)^{k+1}}{\beta^2-2\beta+4}\cdot\frac{1}{q^k} =$$
$$= \frac{3\beta\left(\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)\right)}{\beta^2-2\beta+4}\lim_{k\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)\right)^k}{q^k}.$$

В данной ситуации возможны 3 случая:

1) $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k) = 0$, при $q > \frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k) = \dfrac{3\beta\left(\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)\right)}{\beta^2-2\beta+4}$, при $q = \frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k) = \infty$, при $q < \frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)$.

Проверим ряд на сходимость по признаку Коши:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\alpha_1(k)}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{F_3(k+1)b_0^k}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{3\beta\left(\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)\right)^{k+1}}{\beta^2-2\beta+4}\cdot\frac{1}{q^k}\right]^{\frac{1}{k}}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\beta(\lambda_1+\lambda_2+1)}{\beta^2-2\beta+4}\right]^{\frac{1}{k}}\left[\frac{\left(\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)\right)^{\frac{k}{k}}}{q^{\frac{k}{k}}}\right]=\frac{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)}{q}.$$

Также возможны 3 варианта:

1) $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k)<1$ при $q>\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k)=1$ при $q=\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k)>1$ при $q<\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)$.

Вернемся к замене, тогда при $b_0<\frac{3}{(\lambda_1+\lambda_2+1)}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k)=0$. Лемма доказана.

Представим коэффициенты $\alpha_2(k)$ при x_{t-1}:

$$\alpha_2(1)=b_0$$
$$\alpha_2(2)=2b_0^2$$
$$\alpha_2(3)=3b_0^3$$
$$\alpha_2(4)=6b_0^4$$
$$\alpha_2(5)=11b_0^5$$
$$\vdots$$
$$\alpha_2(k)=F_3'(k+1)b_0^{k+1},$$

где $F_3'(k+1)$ – модифицированный ряд чисел Трибоначчи.

Определение 3. Модифицированный ряд Трибоначчи – это последовательность чисел, заданная рекурсией $F_3'(k+1)=F_3'(k)+F_3'(k-1)+F_3'(k-2)$, где $F_3(0)=0$, $F_3(1)=0$, $F_3(2)=1$, $F_3(3)=2$.

Лемма 10. Пусть $\sum\limits_{i=0}^{\infty}b_0^i$ – нормированный знакоположительный степенной ряд, где $0\le b_i<1$. Тогда $\alpha_2(k)=F_3'(k+1)b_0^{k+1}$, где $F_3'(k+1)$ – модифицированный ряд чисел Трибоначчи.

Доказательство. Аналогично лемме 8:

$$\alpha_2(k)=b_0\alpha_2(k-1)+b_0^2\alpha_2(k-2)+b_0^3\alpha_2(k-3)=$$
$$=b_0\left(F_3'(k)b_0^k\right)+b_0^2\left(F_3'(k-1)b_0^{k-1}\right)+b_0^3\left(F_3'(k-2)b_0^{k-2}\right)=$$

$$= b_0^{k+1}\left(F_3'(k)+F_3'(k-1)+F_3'(k-2)\right)=F_3'(k+1)\,b_0^{k+1}.$$

Лемма доказана.

Лемма 11. Пусть $b_0 < \dfrac{1}{\left[\left(9+3\sqrt{33}\right)^{1/3}+\left(9-3\sqrt{33}\right)^{1/3}+1\right]}$. Тогда, $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_2(k)=0$.

Доказательство. Заметим, что числа модифицированного ряда Трибоначчи, начиная с 3, будут всегда меньше чисел обычного ряда Трибоначчи, поэтому в доказательстве будем использовать функцию из леммы 9.

Произведем аналогичную замену $b_0=\dfrac{1}{q}$, где $q>1$.

Определим предел k-го члена:

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_1(k)=\lim_{k\to\infty}F_3(k+1)\,b_0^{k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{3\beta\left(\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)\right)^{k+1}}{\beta^2-2\beta+4}\cdot\frac{1}{q^{k+1}}=$$

$$=\frac{3\beta}{\beta^2-2\beta+4}\lim_{k\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)\right)^{k+1}}{q^{k+1}}=\frac{3\beta}{\beta^2-2\beta+4}\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)}{q}\right]^{k+1}.$$

В данной ситуации возможны 3 случая:

1) $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k)=0$, при $q>\dfrac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k)=\dfrac{3\beta}{\beta^2-2\beta+4}$, при $q=\dfrac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k)=\infty$, при $q<\dfrac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)$.

Проверим ряд на сходимость по признаку Коши:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\alpha_1(k)}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{F_3(k+1)\,b_0^{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{3\beta\left(\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)\right)^{k+1}}{\beta^2-2\beta+4}\cdot\frac{1}{q^{k+1}}\right]^{\frac{1}{k}}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\beta(\lambda_1+\lambda_2+1)}{(\beta^2-2\beta+4)q}\right]^{\frac{1}{k}}\left[\frac{\left(\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)\right)^{\frac{k}{k}}}{q^{\frac{k}{k}}}\right]=\frac{\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)}{q}.$$

Также возможны 3 варианта:

1) $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k)<1$ при $q>\dfrac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k)=1$ при $q=\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k)>1$ при $q<\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)$.

Вернемся к замене, тогда при $b_0<\frac{3}{(\lambda_1+\lambda_2+1)}$ $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_1(k)=0$. Лемма доказана.

Представим коэффициенты $\alpha_3(k)$ при x_{t-2}:

$$\alpha_3(1)=b_0$$
$$\alpha_3(2)=b_0^2$$
$$\alpha_3(3)=2b_0^3$$
$$\alpha_3(4)=4b_0^4$$
$$\alpha_3(5)=7b_0^5$$
$$\vdots$$
$$\alpha_3(k)=F_3(k)b_0^{k+2},$$

где $F_3(k)$ – ряд чисел Трибоначчи.

Лемма 12. Пусть $\sum\limits_{i=0}^{\infty}b_0^i$ – нормированный знакоположительный степенной ряд, где $0\le b_i<1$. Тогда $\alpha_3(k)=F_3(k)b_0^{k+2}$, где $F_3(k)$ – ряд чисел Трибоначчи.

Доказательство. Аналогично лемме 8 и 9:

$$\alpha_3(k)=b_0\alpha_3(k-1)+b_0^2\alpha_3(k-2)+b_0^3\alpha_3(k-3)=$$
$$=b_0\left(F_3(k-1)b_0^{k+1}\right)+b_0^2\left(F_3(k-2)b_0^{k}\right)+b_0^3\left(F_3(k-3)b_0^{k-1}\right)=$$
$$=b_0^{k+2}\left(F_3(k-1)+F_3(k-2)+F_3(k-3)\right)=F_3(k)b_0^{k+2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 13. Пусть $b_0<\frac{1}{\left[(9+3\sqrt{33})^{1/3}+(9-3\sqrt{33})^{1/3}+1\right]}$. Тогда, $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_3(k)=0$.

Доказательство.

Произведем аналогичную замену $b_0=\frac{1}{q}$, где $q>1$.

Определим предел k-го члена:

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_3(k)=\lim_{k\to\infty}F_3(k)b_0^{k+2}=\lim_{k\to\infty}\frac{3\beta\left(\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+1)\right)^k}{\beta^2-2\beta+4}\cdot\frac{1}{q^{k+2}}=$$

$$= \frac{3\beta}{\left(\beta^2 - 2\beta + 4\right)} \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\left(\frac{1}{3}\left(\lambda_1 + \lambda_2 + 1\right)\right)}{q} \right]^k \frac{1}{q^2} =$$

$$= \frac{3\beta}{\left(\beta^2 - 2\beta + 4\right) q^2} \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + 1}{3q} \right]^k .$$

В данной ситуации возможны 3 случая:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_1(k) = 0$, при $q > \frac{1}{3}\left(\lambda_1 + \lambda_2 + 1\right)$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_1(k) = \frac{27\beta}{\left(\beta^2 - 2\beta + 4\right)\left(\lambda_1 + \lambda_2 + 1\right)^2}$, при $q = \frac{1}{3}\left(\lambda_1 + \lambda_2 + 1\right)$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_1(k) = \infty$, при $q < \frac{1}{3}\left(\lambda_1 + \lambda_2 + 1\right)$.

Проверим ряд на сходимость по признаку Коши:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\alpha_3(k)} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{F_3(k)\, b_0^{k+2}} = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{3\beta\left(\frac{1}{3}\left(\lambda_1 + \lambda_2 + 1\right)\right)^k}{\beta^2 - 2\beta + 4} \cdot \frac{1}{q^{k+2}} \right]^{\frac{1}{k}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{3\beta}{\beta^2 - 2\beta + 4} \right]^{\frac{1}{k}} \left[\frac{\left(\frac{1}{3}\left(\lambda_1 + \lambda_2 + 1\right)\right)^{\frac{k}{k}}}{q^{\frac{k+2}{k}}} \right] = \frac{\frac{1}{3}\left(\lambda_1 + \lambda_2 + 1\right)}{q} .$$

Также возможны 3 варианта:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_1(k) < 1$ при $q > \frac{1}{3}\left(\lambda_1 + \lambda_2 + 1\right)$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_1(k) = 1$ при $q = \frac{1}{3}\left(\lambda_1 + \lambda_2 + 1\right)$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_1(k) > 1$ при $q < \frac{1}{3}\left(\lambda_1 + \lambda_2 + 1\right)$.

Вернемся к замене, тогда при $b_0 < \frac{3}{\left(\lambda_1 + \lambda_2 + 1\right)}$ $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_1(k) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 14. Пусть $\alpha_1(k)$ – это весовой коэффициент при x_t, $\alpha_3(k)$ – это весовой коэффициент при x_{t-2} при прогнозировании в AR(3) по МНЧР. Тогда $\alpha_3(k) = b_0^3 \alpha_1(k-1)$.

Доказательство. Согласно лемме 8:

$$\alpha_1(k-1) = F_3(k)\, b_0^{k-1} .$$

Согласно лемме 10:

$$\alpha_3(k) = F_3(k)b_0^{k+2} = F_3(k)b_0^{k-1}b_0^3 = b_0^3\alpha_1(k-1).$$

Лемма доказана.

Поэтому $\alpha_3(k)$ имеет те же свойства, что $\alpha_1(k)$.

Обобщим вышесказанное.

Теорема 2. Пусть $y_{t+k} = \alpha_1(k)x_t + \alpha_2(k)x_{t-1} + \alpha_3(k)x_{t-2}$ – прогнозная модель AR(3) по МНЧР. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\alpha_1(k) = F_3(k+1)b_0^k$;

2) $\alpha_2(k) = F_3'(k+1)b_0^{k+1}$;

3) $\alpha_3(k) = F_3(k)b_0^{k+2}$;

4) $\alpha_3(k) = b_0^3\alpha_1(k-1)$;

5) $\lim\limits_{k\to\infty} y_{t+k} = 0$, при $b_0 < \dfrac{1}{\left[(9+3\sqrt{33})^{1/3} + (9-3\sqrt{33})^{1/3} + 1\right]}$;

6) $\lim\limits_{k\to\infty} y_{t+k} = C$, при $b_0 = \dfrac{1}{\left[(9+3\sqrt{33})^{1/3} + (9-3\sqrt{33})^{1/3} + 1\right]}$;

7) $\lim\limits_{k\to\infty} y_{t+k} = \infty$, при $b_0 > \dfrac{1}{\left[(9+3\sqrt{33})^{1/3} + (9-3\sqrt{33})^{1/3} + 1\right]}$.

Доказательство. Первое утверждение доказывается леммой 8. Второе леммой 10. Третье утверждение на основе леммы 12. Четвертое – леммой 14.

Доказательство пятого утверждения доказывается на основе лемм 9, 11 и 13:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} y_{t+k} &= \lim_{k\to\infty}\left(\alpha_1(k)x_t + \alpha_2(k)x_{t-1} + \alpha_3(k)x_{t-2}\right) = \\
&= \lim_{k\to\infty}\alpha_1(k)x_t + \lim_{k\to\infty}\alpha_2(k)x_{t-1} + \lim_{k\to\infty}\alpha_3(k)x_{t-2} = \\
&= x_t\lim_{k\to\infty}\alpha_1(k) + x_{t-1}\lim_{k\to\infty}\alpha_2(k) + x_{t-2}\lim_{k\to\infty}\alpha_3(k) = \\
&= 0*x_t + 0*x_{t-1} + 0*x_{t-2} = 0.
\end{aligned}$$

На основе тех же лемм доказываются 6 и 7 пункты теоремы:

$$\lim_{k\to\infty} y_{t+k} = x_t\lim_{k\to\infty}\alpha_1(k) + x_{t-1}\lim_{k\to\infty}\alpha_2(k) + x_{t-1}\lim_{k\to\infty}\alpha_3(k) =$$

$$= \frac{3\beta}{\beta^2-2\beta+4}x_t + \frac{3\beta}{\beta^2-2\beta+4}x_{t-1} + \frac{27\beta}{(\beta^2-2\beta+4)(\lambda_1+\lambda_2+1)^2}x_{t-2}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} y_{t+k} &= x_t\lim_{k\to\infty}\alpha_1(k) + x_{t-1}\lim_{k\to\infty}\alpha_2(k) + x_{t-2}\lim_{k\to\infty}\alpha_3(k) = \\
&= \infty\cdot x_t + \infty\cdot x_{t-1} + \infty\cdot x_{t-2} = \infty.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что в ряде случаев прогноз в моделях AR(3) есть средневзвешенное последних трех значений динамического ряда с весами золотого сечения.

Заключение. При рассмотрении свойств прогнозов в AR(2) и AR(3) моделях на основе МЧР была выявлена взаимосвязь будущих значений с золотым сечением.

В дальнейшем планируется рассмотреть авторегрессии более высоких порядков и выявить возможные закономерности прогнозов в этих моделях.

Литература

1. Эконометрия / *А.А. Цыплаков, В.И. Суслов, Н.М. Ибрагимов* [и др.]. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2005. – 744 с.
2. *Айвазян С.А., Мхитарян В.С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1998. – 1022 с.
3. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир, 1974. – Вып. 1.
4. *Городов А.А.* Моделирование временных рядов на основе нормированных числовых рядов // СУИТ. – 2010. – Вып. 22.
5. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1978. – 144 с.