

РАСЧЕТ ТОНКИХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК С ПРИМЕНЕНИЕМ МНОГОСЕТОЧНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ*

В статье рассматриваются многосеточные конечные элементы со свободной границей для трехмерного анализа деформирования однородных и композитных тонких упругих пластин и оболочек постоянной толщины. Конечные элементы описывают трехмерное напряженное состояние в пластинах и оболочках, учитывают их неоднородную структуру, сложный характер закрепления и нагружения, порождают дискретные модели малой размерности.

Ключевые слова: композиты, упругость, пластины, оболочки, метод конечных элементов, многосеточные конечные элементы.

A.D. Matveev

CALCULATION OF THIN PLATES AND SHELLS USING MULTI-GRID FINITE ELEMENTS WITH FREE BOUNDARIES

The multi-grid finite elements with free boundary for the deformation three-dimensional analysis of the deformation of homogeneous and composite thin elastic plates and shells with constant thickness are considered in the article. Finite elements describe the three-dimensional strained state in plates and shells, take into account their heterogeneous structure, the complex character of fastening and loading, generate discrete models of small dimension.

Key words: composites, elasticity, plates, shells, finite element method, multi-grid finite elements.

При расчете тонких однородных (композитных) пластин и оболочек постоянной толщины используют приближенные теории [1, 2, 3]. Общий недостаток этих теорий заключается в том, что в их основе лежат гипотезы, которые порождают неустранимую погрешность в решениях. Существующие теории оболочек и панелей не учитывают сложный характер их закрепления и нагружения (например, закрепление и нагружение оболочки, панели частично по толщине), не всегда точно описывают поведение панелей и оболочек под действием локальных нагружений.

В данной работе при анализе по методу конечных элементов (МКЭ) деформирования однородных и композитных тонких пластин и оболочек предложены многосеточные конечные элементы (МнКЭ) со свободной границей, в которых реализуется трехмерное напряженное состояние. Многосеточные конечные элементы (КЭ) формы прямоугольного параллелепипеда для анализа деформирования упругих тел однородной и неоднородной структуры рассмотрены в работах [4, 5]. Существуют два типа МнКЭ [4]. Для проектирования m -сеточного однородного и композитного конечного элемента используются m вложенных узловых сеток. Самая мелкая сетка порождена базовым разбиением, которое учитывает форму и неоднородную структуру m -сеточного КЭ. Для m -сеточного КЭ первого типа $m - 1$ сетка определяются на всей его области, для m -сеточного второго типа – на его границе. С помощью аппроксимирующих функций перемещений, построенных на крупных сетках, все неизвестные мелкой сетки МнКЭ первого типа выражаются через узловые неизвестные крупных сеток. При построении МнКЭ второго типа вначале с помощью метода конденсации [6] исключаются неизвестные внутренних узлов мелкой сетки. Затем неизвестные граничных узлов мелкой сетки МнКЭ представляются через узловые неизвестные крупных сеток.

Расчеты показывают, что в дискретных моделях тонких однородных и композитных пластин и оболочек постоянной толщины целесообразно по толщине пластины, оболочки использовать один МнКЭ, т.е. толщина МнКЭ равна толщине пластины, оболочки. В этом случае верхняя (нижняя) граница многосеточного элемента совпадает с верхней (нижней) границей пластины, оболочки. Используя метод конденсации, узловые неизвестные мелкой сетки исключаем внутри области, на верхней и нижней границах многосеточного элемента. Крупные сетки определяем на боковых границах МнКЭ. С помощью аппроксимаций перемещений,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-0053).

построенных на крупных сетках, выражаем неизвестные узлов мелкой сетки, лежащих на боковых границах МнКЭ, через узловые неизвестные крупных сеток.

Процедура построения МнКЭ со свободными границами. Многосеточный конечный элемент, у которого с помощью метода конденсации неизвестные мелкой сетки исключаются во всех ее внутренних узлах и в граничных узлах, лежащих на той части (свободной) границы данного МнКЭ, которая совпадает с частью не закрепленной границей тела, для краткости будем называть МнКЭ со свободной границей. На рис. 1, а, б свободные верхние и нижние границы $ABCD$, $KNML$ пластинчатого и оболочечного МнКЭ совпадают соответственно с верхними и нижними поверхностями пластины, оболочки постоянной толщины h , $h = CM$. На рисунке 1, а боковые границы пластинчатого МнКЭ есть прямоугольники $ADLK$, $AKNB$, $BCMN$, $LDCM$, оболочечного МнКЭ (рис. 1, б) – прямоугольники $AKNB$, $LDCM$ и криволинейные грани $ADLK$, $BCMN$.

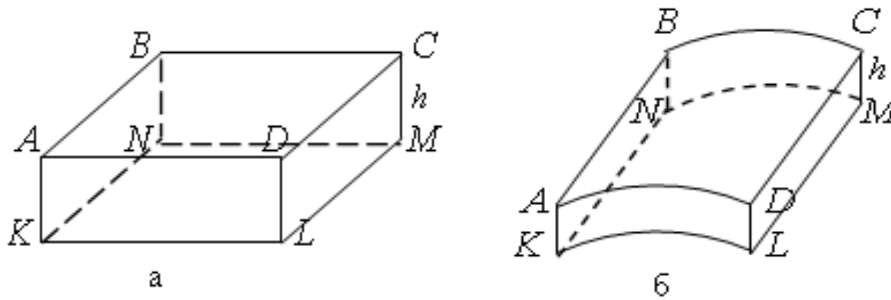


Рис. 1. Пластинчатый МнКЭ (а) оболочечный МнКЭ (б)

Процедуру построения МнКЭ со свободными границами покажем на примере построения пятисеточного КЭ (ПтКЭ) V_p формы прямоугольного параллелепипеда, который применяется для расчета тонких однородных (композитных) пластин постоянной толщины h (рис. 1, а). Область ПтКЭ V_p представляем мелким (базовым) разбиением, состоящим из однородных известных односеточных КЭ V_e 1-го порядка формы куба [7]. Базовое разбиение оболочечного МнКЭ состоит из однородных криволинейных шестигранных КЭ 1-го порядка [6, 7]. Функции перемещений, напряжений и деформаций КЭ V_e удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, которые отвечают трехмерной задаче теории упругости [7], т.е. в КЭ V_e и, следовательно, в ПтКЭ V_p реализуется трехмерное напряженное состояние. Базовое разбиение учитывает неоднородную структуру ПтКЭ V_p и порождает мелкую сетку V_h . С помощью метода конденсации исключаем неизвестные во внутренних узлах мелкой сетки V_h и во внутренних узлах свободных границ $ABCD$ и $KNML$ (рис. 1, а, б). В результате получаем суперэлемент V_s , узловые неизвестные которого определяются только в узлах мелкой сетки боковых граней. Полную потенциальную энергию Π_s суперэлемента V_s представим в матричной форме:

$$\Pi_s = 0,5 (\mathbf{q}_s)^T [K_s] \mathbf{q}_s - (\mathbf{q}_s)^T \mathbf{P}_s, \quad (1)$$

где $[K_s]$ – матрица жесткости суперэлемента V_s ; $\mathbf{P}_s, \mathbf{q}_s$ – векторы узловых сил и неизвестных суперэлемента V_s ; T – транспонирование.

На четырех боковых гранях (рис. 1, а) грани $ADLK$, $AKNB$, $BCMN$, $LDCM$ суперэлемента V_s определяем две крупные различные прямоугольные узловые сетки V_0^i , $i = 1, \dots, 4$, вложенные в мелкую сетку V_h . В общем случае крупные сетки V_0^i имеют различное число узлов либо различные шаги по сторонам KN , KL , NM , LM (рис. 1, а). Узлы крупных сеток пластичного и оболочечного многосеточных КЭ

на рис. 2, а, б отмечены точками. С помощью полиномов Лагранжа [6] на крупной сетке V_0^i для перемещений u, v, w строим соответственно аппроксимирующие функции u_i, v_i, w_i , которые запишем в виде

$$u_i = \sum_{\beta=1}^{n_i} N_{\beta}^i q_{\beta}^u, \quad v_i = \sum_{\beta=1}^{n_i} N_{\beta}^i q_{\beta}^v, \quad w_i = \sum_{\beta=1}^{n_i} N_{\beta}^i q_{\beta}^w, \quad (2)$$

где N_{β}^i – базисная функция β -го узла крупной сетки V_0^i ; $q_{\beta}^u, q_{\beta}^v, q_{\beta}^w$ – значения функций u_i, v_i, w_i в β -м узле сетки V_0^i ; $3n_i$ – общее число неизвестных крупной сетки V_0^i ($i = 1, \dots, 4$).

Обозначим через \mathbf{q}_0 вектор узловых неизвестных МКЭ всех крупных сеток V_0^i , $i = 1, \dots, 4$. Используя (2), вектор \mathbf{q}_s узловых перемещений суперэлемента V_s выражаем через узловые неизвестные вектора \mathbf{q}_0 . В результате получим равенство

$$\mathbf{q}_s = [A_s] \mathbf{q}_0, \quad (3)$$

где $[A_s]$ – прямоугольная матрица.

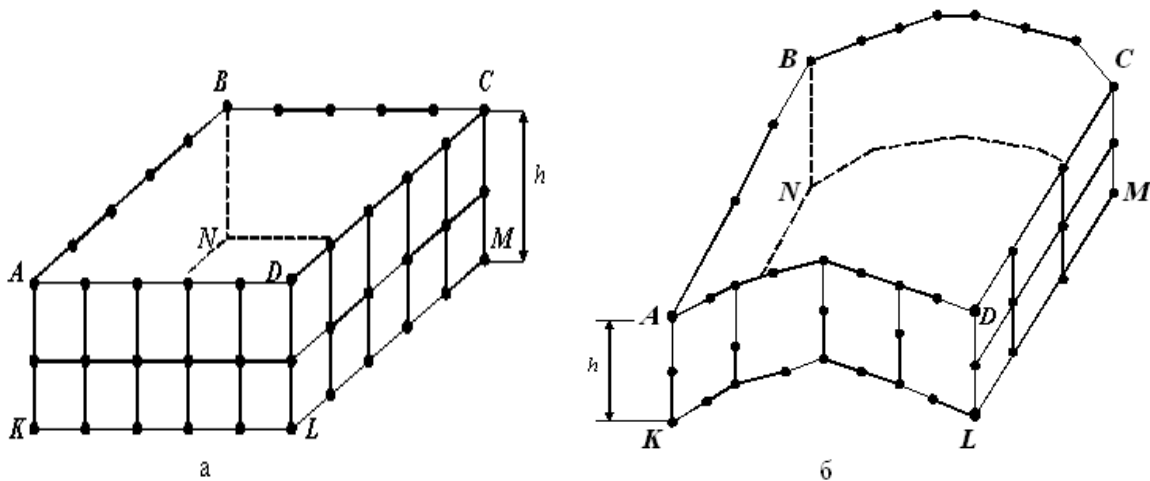


Рис. 2. Крупные сетки МКЭ: а – пластинчатого; б – оболочечного

Подставляя (3) в выражение (1), из условия $\partial \Pi_s / \partial \mathbf{q}_0 = 0$ получаем матричное уравнение $[K_0] \mathbf{q}_0 = \mathbf{F}_0$,

$$\text{где} \quad [K_0] = [A_s]^T [K_s] [A_s], \quad \mathbf{F}_0 = [A_s]^T \mathbf{P}_s; \quad (4)$$

$[K_0], \mathbf{F}_0$ – матрица жесткости и вектор узловых сил ПтКЭ V_p .

При построении ПтКЭ V_p используем одну мелкую сетку V_h и две (в общем случае) различных крупных сетки V_0^i , $i = 1, \dots, 4$. Процедура построения матриц жесткости и векторов узловых сил криволинейных оболочечных МКЭ со свободными границами аналогична вышеописанной.

Многосеточные элементы сложной формы. Расчеты показывают, что построение полиномов Лагранжа [6], связанное с операцией последовательных умножений чисел, при больших значениях n_i (см. (2)) порождает погрешность вычислений ЭВМ, которая приводит к численной неустойчивости решений, построенных по МКЭ. В связи с этим используем локальные аппроксимации [8], суть которых состоит в следующем. Области боковых граней МКЭ представляем непересекающимися подобластями. На подобластях определяем (локальные) крупные узловые сетки, вложенные в мелкую сетку. На крупных сетках подобластей стро-

им локальные аппроксимирующие функции перемещений. На общей границе двух подобластей узлы крупных сеток совпадают. На подобластях прямоугольной формы локальные аппроксимации перемещений строим с помощью полиномов Лагранжа малого порядка. Грани пластинчатых и оболочечных МКЭ сложной формы (в плане) представляем подобластями вида треугольных, четырехугольных КЭ 1-, 2- и 3-го порядков, узловые сетки которых являются локальными крупными сетками. На рис. 2, а, б узлы локальных крупных сеток боковых границ отмечены точками. Криволинейная граница $ADLK$ (рис. 2, б) представлена четырехугольными КЭ второго порядка (имеют 8 узлов), узловые сетки которых являются локальными крупными сетками. На боковых прямоугольных гранях $ABNK$, $DCML$ (рис. 2, б) для аппроксимации перемещений можно использовать полиномы Лагранжа. На рисунке 3 показано разбиение боковых границ пластинчатого и оболочечного МКЭ сложной формы на подобласти, на которых определяются крупные локальные сетки.

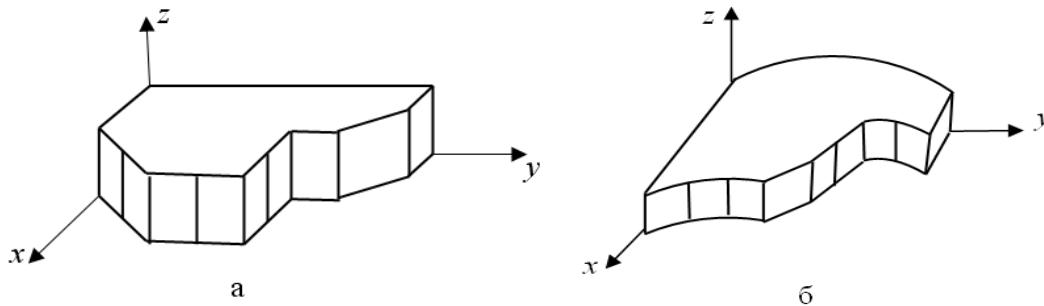


Рис. 3. МКЭ сложной формы: а – пластинчатый; б – оболочечный

Особенности предлагаемых пластинчатых и оболочечных МКЭ состоят в том, что они имеют две свободные верхние и нижние границы (границы $ABCD$ и $KLMN$ (рис. 1, а, б)) и при этом неизвестные определяются только в узлах крупных сеток, которые построены на боковых гранях МКЭ (рис. 2, а, б).

Достоинства предлагаемых конечных элементов состоят в следующем. Пластинчатые и оболочечные многосеточные КЭ со свободными границами:

- описывают трехмерное напряженное состояние в тонких пластинах и оболочках;
- учитывают сложную форму, сложные условия закрепления и локальный характер нагружения тонких пластин и оболочек;
- учитывают неоднородную структуру тонких пластин и оболочек;
- порождают дискретные модели тонких пластин и оболочек, размерности которых на несколько порядков меньше размерностей их базовых дискретных моделей. Поэтому реализация МКЭ для дискретных моделей тонких пластин и оболочек (состоящих из МКЭ со свободными границами) требует меньше временных затрат и памяти ЭВМ, чем для базовых моделей.

Литература

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976.
2. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. – М.: Изд-во МГУ, 1969.
3. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания. – Новосибирск: Наука, 2001.
4. Матвеев А.Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов: деп. в ВИНТИ. – М., 2000. – № 2990-В00. – 30 с.
5. Матвеев А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // Прикладная механика и техническая физика. – 2004. – № 3. – С. 161–171.
6. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
8. Матвеев А.Д. Построение многосеточных конечных элементов сложной формы с применением локальных аппроксимаций // Вестн. КрасГАУ. – 2013. – № 1. – С. 28–34.